$A = U\Lambda U^*$

С.Н. Зиненко

Линейная алгебра

Матрицы и определители

(теория к задачам)

2015

1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО, ПОДПРОСТРАНСТВО. БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ

1° ***Линейным пространством*** $\mathbb{E}$ *называется множество элементов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ... *(называемых* ***векторами****), на котором введены операции сложения* $\{+\}$ *элементов между собой и умножения* $\{\times\} \equiv \{\cdot\}$ *на* ***число*** $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, *удовлетворяющие условиям* $1^\circ - 8^\circ$

1° $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$	5° $\alpha\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \alpha\cdot\boldsymbol{a}+\alpha\cdot\boldsymbol{b}$		
2° $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$	6° $(\alpha+\beta)\cdot\boldsymbol{a} = \alpha\cdot\boldsymbol{a}+\beta\cdot\boldsymbol{a}$	$\Rightarrow$	$\alpha\cdot\boldsymbol{0} = 0\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$
3° $\exists\boldsymbol{0}:\quad \forall\boldsymbol{a}\quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$	7° $(\alpha\cdot\beta)\cdot\boldsymbol{a} = \alpha\cdot(\beta\cdot\boldsymbol{a})$		$(-\boldsymbol{a}) = (-1)\cdot\boldsymbol{a}$
4° $\forall\boldsymbol{a}\ \exists(-\boldsymbol{a}):\ \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$	8° $1\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$		

Операции $\{+\}$ ***(векторов)*** *и* $\{\times\}$ *(на* ***число****) называются* ***линейными****, а потому комбинация векторов* $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ *с коэффициентами* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_m\}$

$$\boldsymbol{b} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{a}_m = \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\boldsymbol{a}_k$$

получила название ***линейной комбинации****.*

Рассмотрим "крайние" ситуации, когда линейные комбинации порождают только $\boldsymbol{0}$ *(своего рода "****ничто****") или, наоборот, образуют* ***все*** *пространство* $\mathbb{E}$.

2° *Система векторов* $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_k, \ldots, \boldsymbol{f}_m\}$ *называется* ***линейно независимой****, если равенство* ***нулю*** *линейной комбинации*

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\cdot\boldsymbol{f}_k = \boldsymbol{0}$$

возможно ***только*** *в тривиальном случае* $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = \ldots = \alpha_m = 0$.
(и ***линейно зависимой****, если хотя бы один из коэффициентов* $\alpha_{k_0} \neq 0$*)*

Очевидно, если среди векторов имеется ***нулевой*** $\boldsymbol{f}_{k_0} = \boldsymbol{0}$, *то система* ***линейно зависима***
*В общем случае, термин "****зависимый****" поясняет следующая*

Теорема

Для того,
1) чтобы система векторов $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_k, \ldots, \boldsymbol{f}_m\}$ *была* ***линейно зависимой***
$\Leftrightarrow$
1) чтобы хотя бы один из векторов выражался линейно через остальные ("зависел" от ***остальных****, в частности, от* ***предыдущих****)* $\boldsymbol{f}_{k_0} = -\sum_{k\neq k_0}\dfrac{\alpha_k}{\alpha_{k_0}}\cdot\boldsymbol{f}_k$

Теорема

Элементарные операции

*1) "****перестановка****"* $i \rightleftarrows j$ $\quad\Rightarrow\quad \{\ldots, \boldsymbol{f}_i, \ldots, \boldsymbol{f}_j, \ldots\} \sim \{\ldots, \boldsymbol{f}_j, \ldots, \boldsymbol{f}_i, \ldots\}$

*2) "****умножение****"* $\alpha \times k$ $\quad\Rightarrow\quad \{\ldots, \boldsymbol{f}_k, \ldots\} \sim \{\ldots, \alpha\boldsymbol{f}_k, \ldots\},\ \alpha \neq 0$

*3) "****сложение****"* $i + j$ $\quad\Rightarrow\quad \{\ldots, \boldsymbol{f}_i, \ldots, \boldsymbol{f}_j, \ldots\} \sim \{\ldots, \boldsymbol{f}_i, \ldots, \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{f}_j, \ldots\}$

не изменяют характера системы (линейно ***независимой*** *или* ***зависимой****)*

Из простого наблюдения

$$\left\{ \boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_k, \dots, \boldsymbol{f}_m \right\} \begin{array}{l} \nearrow \ \textbf{\textit{лнз}} \\ \searrow \ \textbf{\textit{лз}} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \textbf{\textit{сужение}} & \left\{ \boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_k \right\} \\ \textbf{\textit{расширение}} & \left\{ \boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_m, \boldsymbol{f}_{m+1}, \dots \right\} \end{array} \ \textit{тем более} \ \begin{array}{l} \textbf{\textit{лнз}} \\ \textbf{\textit{лз}} \end{array}$$

вытекает вопрос о поиске ***max*** *возможной* ***линейно независимой*** *системы векторов*

3° *Система векторов* $\left\{ \boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_k, \cdots, \boldsymbol{g}_m \right\}$ *называется* ***полной****, если линейные комбинации*

$$\boldsymbol{b} = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \cdot \boldsymbol{g}_k$$

порождают ***все*** *пространство* $\mathbb{E}$ *(и* ***не****полной, если* ***не*** *все).*

Очевидно, если среди векторов имеется ***нулевой*** $\boldsymbol{g}_{k_0} = \boldsymbol{0}$, *то он “****лишний****”, т.е. его можно безболезненно удалить, не нарушив свойства полноты (неполноты)*

Теорема

> *Элементарные операции*
>
> *1) “****перестановка****”* $i \rightleftarrows j$ *2) “****умножение****”* $\alpha \times k$ *3) “****сложение****”* $i + j$
>
> *не изменяют характера системы (****полной*** *или* ***неполной****)*

Следовательно, если некоторый вектор $\boldsymbol{g}_{k_0}$ *есть линейная комбинация остальных, то он “****лишний****”, т.е. его можно* ***удалить****, не нарушив полноты (неполноты)*

Из простого наблюдения

$$\left\{ \boldsymbol{g}_1, \dots, \boldsymbol{g}_k, \dots, \boldsymbol{g}_m \right\} \begin{array}{l} \nearrow \ \textbf{\textit{полн}} \\ \searrow \ \textbf{\textit{неполн}} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \textbf{\textit{расширение}} & \left\{ \boldsymbol{g}_1, \dots, \boldsymbol{g}_m, \boldsymbol{g}_{m+1}, \dots \right\} \\ \textbf{\textit{сужение}} & \left\{ \boldsymbol{g}_1, \dots, \boldsymbol{g}_k \right\} \end{array} \ \textit{тем более} \ \begin{array}{l} \textbf{\textit{полн}} \\ \textbf{\textit{неполн}} \end{array}$$

вытекает вопрос о поиске ***min*** *возможной* ***полной*** *системы векторов*

4° ***Базисом*** *называется* ***полная*** *и* ***линейно независимая*** *система векторов*

$$\left\{ \boldsymbol{e} \right\} = \left\{ \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k, \dots, \boldsymbol{e}_n \right\}$$

Теорема

> *Элементарные операции*
>
> *1) “****перестановка****”* $i \rightleftarrows j$ *2) “****умножение****”* $\alpha \times k$ *3) “****сложение****”* $i + j$
>
> *не изменяют характера системы (****базисной*** *или* ***небазисной****)*

Из сравнения: $\forall$ ***лнз*** $\left\{ \boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_m \right\}$ *и* $\forall$ ***полн*** $\left\{ \boldsymbol{g}_1, \dots, \boldsymbol{g}_n \right\} \Rightarrow m \le n$, *вытекает*

Теорема

> *Все базисы состоят из одного и того же числа* $\boldsymbol{n}$ *векторов, называемом* ***размерностью*** *пространства*
>
> $$\dim \mathbb{E} = n \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E} \equiv \mathbb{E}_n$$

Следовательно, базис

$$\left\{ \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k, \dots, \boldsymbol{e}_n \right\} \begin{array}{l} \nearrow \ \textbf{\textit{max}} \\ \searrow \ \textbf{\textit{min}} \end{array} \ \textit{возможная} \ \begin{array}{l} \textbf{\textit{лнз}} \\ \textbf{\textit{полн}} \end{array} \ \textit{система векторов}$$

Теорема *(другое определение базиса)*

Для того,

1) чтобы система векторов $\{\boldsymbol{e}\}=\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ *была* ***базисом***

$\Leftrightarrow$

1) чтобы $\forall \boldsymbol{a}\in\mathbb{E}$ ***единственным*** *образом выражался через векторы системы*

$$\boldsymbol{a}=\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot\boldsymbol{e}_k = x_1\cdot\boldsymbol{e}_1+\dots+x_k\cdot\boldsymbol{e}_k+\dots+x_n\cdot\boldsymbol{e}_n$$

Коэффициенты $(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ *в разложении вектора* $\boldsymbol{a}$ *по базису* $\{\boldsymbol{e}\}$ *называются* ***координатами*** *вектора* $\boldsymbol{a}$ *в базисе* $\{\boldsymbol{e}\}$

$$\boldsymbol{a}\xrightarrow{\{\boldsymbol{e}\}}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \dots\\ x_k\\ \dots\\ x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}\xrightarrow{\{\boldsymbol{e}\}}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}y_1\\ \dots\\ y_k\\ \dots\\ y_n\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}\xrightarrow{\{\boldsymbol{e}\}}\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\alpha x_1+\beta y_1\\ \dots\\ \alpha x_k+\beta y_k\\ \dots\\ \alpha x_n+\beta y_n\end{bmatrix}$$

Замечание. *Два пространства* $\mathbb{E}$ *и* $\mathbb{F}$ *(над одним и тем же множеством чисел* $\mathbb{R}$ *или* $\mathbb{C}$*) называются* ***изоморфными*** $\mathbb{E}\sim\mathbb{F}$, *если между векторами пространств можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее линейную структуру*

$$\mathbb{E}\ni\boldsymbol{e}\leftrightarrow\boldsymbol{f}\in\mathbb{F}\quad\Rightarrow\quad\mathbb{E}\ni\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2\leftrightarrow\alpha_1\boldsymbol{f}_1+\alpha_2\boldsymbol{f}_2\in\mathbb{F}$$

Теорема

Для того,

1) чтобы два пространства $\mathbb{E}_n\sim\mathbb{F}_m$ *были изоморфными*

$\Leftrightarrow$

1) чтобы $\dim\mathbb{E}_n=n=m=\dim\mathbb{F}_m$

Замечание. *Естественная связь между векторами линейного пространства* $\boldsymbol{a}\in\mathbb{E}_n$ *и столбцами их координат* $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}_n$ *в заданном базисе* $\{\boldsymbol{e}\}$: $\boldsymbol{a}\leftrightarrow\boldsymbol{x}$ *есть по сути установление изоморфизма между абстрактным пространством* $\mathbb{E}_n$ *и координатным пространством* $\mathbb{R}_n$

№ 1.2.

Чтобы проверить, образует ли базис система из n векторов n-мерного пространства, достаточно выяснить что-либо одно: является ли она ***линейно независимой*** *или* ***полной***

№ 1.3.

Подпространством *называется подмножество $\mathbb{L}_m \subseteq \mathbb{E}_n$, которое само образует пространство относительно введенных в $\mathbb{E}_n$ операций сложения и умножения*

Очевидно (?!), $$\dim \mathbb{L}_m = m \le n = \dim \mathbb{E}_n$$

Для того, чтобы $\mathbb{L}$ было подпространством, достаточно, чтобы операции сложения и умножения не выводили из $\mathbb{L}$ (аксиомы $1^\circ - 8^\circ$ отсюда следуют автоматически)

$$\forall\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \in \mathbb{L} \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \boldsymbol{a} + \beta \cdot \boldsymbol{b} \in \mathbb{L}$$

Отметим, что если $\boldsymbol{0} \notin \mathbb{L}$, то $\mathbb{L}$ заведомо ***не*** *является подпространством (?!)*

Линейной оболочкой *векторов $\{\boldsymbol{a}\} = \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ называется множество всех линейных комбинаций*

$$\mathbb{L} = \mathrm{Lin}\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k, \dots, \boldsymbol{a}_m\} = \Big\{\boldsymbol{b} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \boldsymbol{a}_k\Big\} \subseteq \mathbb{E}_n$$

Очевидно, линейная оболочка является подпространством и всякое подпространство является линейной оболочкой некоторой системы векторов (например, своего базиса)

№ 1.4.

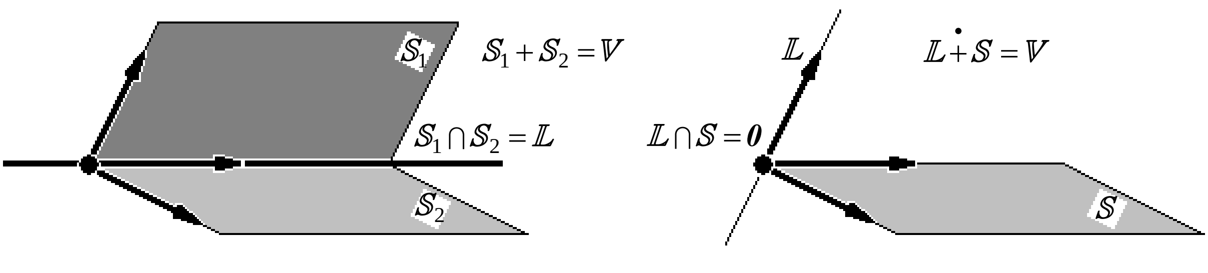
Суммой *$\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2$ и* ***пересечением*** *$\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ двух подпространств $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$ называются множества*

$$\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2 = \{\boldsymbol{a}:\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_1 \in \mathbb{L}_1,\ \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{L}_2\} \qquad \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{\boldsymbol{a}:\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{L}_1,\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{L}_2\}$$

Они, очевидно, являются подпространствами, при этом их размерности связаны ***формулой Грассмана***

$$\dim(\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2) + \dim(\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2) = \dim(\mathbb{L}_1) + \dim(\mathbb{L}_2)$$

Сумма называется ***прямой****, если $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \boldsymbol{0}$, и обозначается $\mathbb{L}_1 \dot{+} \mathbb{L}_2$*



Особо важен случай разложения всего пространства в прямую сумму подпространств

$$\mathbb{E} = \mathbb{F} \dot{+} \mathbb{G}$$

Тогда каждый вектор $\forall\, \boldsymbol{h} \in \mathbb{E}$ ***однозначно*** *разлагается в сумму компонент*

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}, \quad \mathbb{F} \ni \boldsymbol{f},\ \boldsymbol{g} \in \mathbb{G}$$

получивших названия ***проекций h*** *на подпространства $\mathbb{F}$ и $\mathbb{G}$ параллельно $\mathbb{G}$ и $\mathbb{F}$*

2. ЛИНЕЙНЫЕ ОБОЛОЧКИ. РАНГ МАТРИЦЫ

Элементарные операции

*1) “**перестановка**”* $i \leftrightarrows j$ *2) “**умножение**”* $\alpha \times k$ *3) “**сложение**”* $i + j$

не изменяют характера системы векторов:
линейно независимая (зависимая), полная (неполная) и, как следствие, базисная (небазисная)

Из 2), 3) следует, что к любому вектору можно прибавить линейную комбинацию остальных.

Метод Гаусса представляет собой последовательное применение к системе векторов-столбцов (строк) элементарных операций, с целью преобразования ее к “диагональному” виду, в котором соответствующее свойство становится очевидным. Отметим, что для выяснения многих вопросов достаточно проведения “половины” преобразований, приводящих систему к “треугольному” виду (неполный метод Гаусса).

№ 2.1.

Элементарные операции удобней проводить с векторами-строками (напоминает привычное сложение/вычитание целых чисел в столбик). Поэтому развернем векторы-столбцы в строки и составим из них матрицу. Метод Гаусса (неполный) позволяет привести матрицу с помощью элементарных операций над строками к “треугольному” виду.

*Если в процессе преобразований появится **нулевой** вектор, то преобразованная система (вместе с исходной) **линейно зависима**. При этом на соответствующем месте в исходной матрице стоял вектор, являющийся некоторой линейной комбинацией остальных.*

Если нулевой строки не появится, то придем к “треугольной” системе векторов, являющейся линейно независимой вместе с данной.

№ 2.2.

Линейной оболочкой *векторов* $\{\,\boldsymbol{a}\,\} = \{\,\boldsymbol{a}_1,\ \dots,\ \boldsymbol{a}_k,\ \dots,\ \boldsymbol{a}_m\,\}$ *называется множество всех линейных комбинаций*

$$\mathbb{L} = \operatorname{Lin}\{\,\boldsymbol{a}_1,\ \dots,\ \boldsymbol{a}_k,\ \dots,\ \boldsymbol{a}_m\,\} = \Big\{\,\boldsymbol{b} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \boldsymbol{a}_k\,\Big\} \subseteq \mathbb{E}_n$$

Линейная оболочка $\operatorname{Lin}\{\,\boldsymbol{a}_1,\ \dots,\ \boldsymbol{a}_k,\ \dots,\ \boldsymbol{a}_m\,\}$ *- подпространство в* $\mathbb{E}_n$*, а сама система векторов, очевидно, **полна** в нем (а если и **линейно независима**, то образует **базис)***
Для нахождения базиса и размерности линейной оболочки $\mathbb{L}$ *системы векторов, построим матрицу, строками которой являются векторы данной системы. С помощью метода Гаусса (неполного) приведем матрицу к “треугольному” виду.*

*Если в процессе преобразований будут появляться **нулевые** векторы, то **удаляем** их (“**пропалываем лишние**”)*

В конечном итоге придем к “треугольной” подсистеме векторов, являющейся с одной стороны полной вместе с данной системой, но уже линейно независимой, а значит, образующей базис в $\mathbb{L}$*. Строки, стоящие в исходной матрице на соответствующих местах, образуют базис в* $\mathbb{L}$*, а их число (т.е. число ненулевых строк в преобразованной матрице) равно* $\dim\mathbb{L}$

№ 2.3.

Сумма *двух подпространств, заданных как линейные оболочки*

$$\mathbb{L}_1 = \operatorname{Lin}\{\,\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \dots\},\qquad \mathbb{L}_2 = \operatorname{Lin}\{\,\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \dots\,\}$$

*является линейной оболочкой **объединенной** системы*

№ 2.4.

Разобьем матрицу $\boldsymbol{A}$ *размерности* $m \times n$

- *на* m *строк* $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_i, \dots, \boldsymbol{p}_m \in \mathbb{R}_n$ *"длины"* n
- *на* n *столбцов* $\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_j, \dots, \boldsymbol{q}_n \in \mathbb{R}_m$ *"высоты"* m

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \boldsymbol{p}_1 \\ \cdot \\ \boldsymbol{p}_i \\ \cdot \\ \boldsymbol{p}_m \end{array} \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \ \cdots \ a_{1j} \ \cdots \ a_{1n}} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \boxed{a_{i1} \ \cdots \ a_{ij} \ \cdots \ a_{in}} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \boxed{a_{m1} \ \cdots \ a_{mj} \ \cdots \ a_{mn}} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{q}_1 & \cdots & \boldsymbol{q}_j & \cdots & \boldsymbol{q}_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Рангом *(строчным / столбцевым) матрицы* $\boldsymbol{A}$ *называется максимальное число линейно независимых строк / столбцов, т.е. размерность линейных оболочек строк / столбцов.*

Теорема

$$\dim \operatorname{Lin}\{ \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_i, \dots, \boldsymbol{p}_m \} = \dim \operatorname{Lin}\{ \boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_j, \dots, \boldsymbol{q}_n \}$$

Общее значение размерностей называется просто ***рангом*** *матрицы* $\operatorname{rang} \boldsymbol{A}$.

Для нахождения ранга матрицы, приведем ее методом Гаусса (неполному) с помощью элементарных операций над строками к "треугольному" виду. Число оставшихся ненулевых строк равно $\dim \operatorname{Lin}\{ \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_i, \dots, \boldsymbol{p}_m \} = \operatorname{rang} \boldsymbol{A}$, *а сами строки (точнее строки, стоявшие в* $\boldsymbol{A}$ *на соответствующих местах) являются базисными. Базисные столбцы - это столбцы "треугольного" блока (точнее столбцы, стоящие в* $\boldsymbol{A}$ *на соответствующих местах).*

3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ГАУССА

№ 3.1.

Каждое уравнение в системе двух уравнений с ***двумя*** *неизвестными можно интерпретировать, как уравнение* ***прямой*** *на плоскости, а решение системы, как множество общих точек двух прямых. Возможны следующие ситуации*

1. ***единственное*** *решение –* ***точка*** *(прямые пересекаются)*
2. ***бесконечно*** *много решений –* ***прямая*** *(прямые совпадают)*
3. *решений* ***нет*** *(прямые параллельны)*

№ 3.2.

Каждое уравнение в системе трех уравнений с ***тремя*** *неизвестными можно интерпретировать, как уравнение* ***плоскости*** *в пространстве, а решение системы, как множество общих точек трех плоскостей. Возможны следующие ситуации*

1. ***единственное*** *решение -* ***точка*** *(плоскости пересекаются в одной точке)*
2. ***бесконечно*** *много решений*
   - ***прямая*** *- если плоскости пересекаются по прямой*
   - ***плоскость*** *- если совпадают*
3. *решений* ***нет***
   - *плоскости параллельны*
   - *одна плоскость параллельна линии пересечения двух других*

№ 3.3.

Для решения однородной системы m уравнений с n неизвестными, применим метод Гаусса (полный) и приведем матрицу $\boldsymbol{A}$ *системы к “единичному” виду*

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & * \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots\ \mathbb{I} & \\ 0 & & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} * & & * \\ & * & \\ * & & * \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & & 0 \\ & \emptyset & \\ 0 & & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & & 0 \\ & \emptyset & \\ 0 & & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Восстанавливая по преобразованной матрице систему линейных однородных уравнений, выразим первые r переменных линейно через остальные $(n-r)$. Отсюда следует, что множество решений $\mathbb{L}_0$ образует подпространство и $\dim \mathbb{L}_0 = n - r$. *Учитывая, что* $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = r$, *получим* $\dim \mathbb{L}_0 = n - \operatorname{rang} \boldsymbol{A}$.

Базис *в пространстве решений называется* ***фундаментальной системой*** *решений*

№ 3.4.

Для решения неоднородной системы m уравнений с n неизвестными, применим метод Гаусса (полный) и приведем ***расширенную*** *матрицу* $\bar{\boldsymbol{A}}$ *системы к “единичному” виду*

$$\bar{\boldsymbol{A}} = [\,\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}\,] \sim \left[\begin{array}{cc|c} \boldsymbol{I}_r & * & * \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & * \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & * & * & * \\ & \boldsymbol{I} & & ❋ & \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ & \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{0} & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right]$$

Если последние $(m-r)$ *строк преобразованной расширенной матрицы нулевые (включая свободные слагаемые), то удаляем их (тем самым находим “лишние” уравнения и “пропалываем”). В этом случае система совместна (имеет решение)* $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = \operatorname{rang} \bar{\boldsymbol{A}} = r$. *Восстанавливая по преобразованной расширенной матрице систему линейных неоднородных уравнений, выразим первые r переменных линейно через остальные* $(n-r)$ *переменных и свободные слагаемые. Отсюда следует, что общее решение* $\boldsymbol{x}_{он}$ *неоднородной системы имеет вид*

$$\boldsymbol{x}_{он} = \boldsymbol{x}_{чн} + \boldsymbol{x}_{оо}$$

где $\boldsymbol{x}_{оо}$ *- общее (произвольное) решение соответствующей однородной системы, а* $\boldsymbol{x}_{чн}$ *- некоторое фиксированное (частное) решение данной неоднородной системы. Если в преобразованной расширенной матрице среди последних* $(m-r)$ *свободных слагаемых хотя бы одно отлично от нуля, система не совместна (не имеет решений)* $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} \neq \operatorname{rang} \bar{\boldsymbol{A}}$

4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ПРИЛОЖЕНИЯ

№ 4.1.

Система векторов $\{ \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k, \dots, \boldsymbol{a}_m \}$ *называется* ***линейно независимой****, если равенство нулю линейной комбинации*

$$x_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + x_k \boldsymbol{a}_k + \dots + x_m \boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$$

возможно только в тривиальном случае $x_1 = \dots = x_k = \dots = x_m = 0$*, и линейно зависимой, если это возможно, когда среди чисел* $x_1, \dots, x_{k_0}, \dots, x_m$ *хотя бы одно* $x_{k_0} \neq 0$. *Следовательно, выяснение вопроса линейной зависимости / независимости можно свести к решению однородной системы линейных уравнений с матрицей коэффициентов, построенной из столбцов системы*

$$\boldsymbol{A} = \left[\, \boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_k \dots \boldsymbol{a}_m \, \right]$$

Если система уравнений имеет только тривиальное решение, то векторы $\{ \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k, \dots, \boldsymbol{a}_m \}$ *линейно независимы, а если имеются ненулевые решения, то линейно зависимы, при этом компоненты решений и есть коэффициенты нетривиальных линейных комбинаций, равных нулю.*

№ 4.2.

Принадлежность вектора $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Lin}\{ \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k, \dots, \boldsymbol{a}_m \}$ *означает существование чисел* $x_1, \dots, x_k, \dots, x_m$ *таких, что*

$$\boldsymbol{b} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + x_k \boldsymbol{a}_k + \dots + x_m \boldsymbol{a}_m$$

Следовательно, выяснение вопроса возможного разложения вектора $\boldsymbol{b}$ *по векторам* $\{ \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k, \dots, \boldsymbol{a}_m \}$ *можно свести к решению неоднородной системы линейных уравнений с расширенной матрицей коэффициентов*

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \left[\, \boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_k \dots \boldsymbol{a}_m \, \middle| \, \boldsymbol{b} \, \right]$$

Если система уравнений имеет решение (совместна), то вектор

$$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Lin}\{ \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k, \dots, \boldsymbol{a}_m \}$$

т.е. $\boldsymbol{b}$ *разлагается по векторам* $\{ \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k, \dots, \boldsymbol{a}_m \}$*, при этом компоненты решений и есть коэффициенты разложений.*

Если же система неоднородных уравнений не имеет решения (несовместна), то

$$\boldsymbol{b} \notin \mathrm{Lin}\{ \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k, \dots, \boldsymbol{a}_m \}$$

№ 4.3.

Система из n *векторов* $\{\, \boldsymbol{f}_1, \,\dots\, , \,\boldsymbol{f}_k, \dots , \,\boldsymbol{f}_n \,\} \in \mathbb{R}_n$ *в* n*-мерном пространстве образует базис, если она линейно независима. При этом вектор* $\boldsymbol{b}$ *единственным образом разлагается по базису*

$$\boldsymbol{b} = x_1 \boldsymbol{f}_1 + \dots + x_k \boldsymbol{f}_k + \dots + x_n \boldsymbol{f}_n$$

Следовательно, выяснение вопроса можно свести к решению неоднородной системы линейных уравнений с расширенной матрицей $\bar{\boldsymbol{A}} = \left[\, \boldsymbol{f}_1 \dots \boldsymbol{f}_k \dots \boldsymbol{f}_n \,\middle|\, \boldsymbol{b} \,\right]$, *с попутным нахождением ранга матрицы системы уравнений* $\boldsymbol{A} = \left[\, \boldsymbol{f}_1 \dots \boldsymbol{f}_k \dots \boldsymbol{f}_n \,\right]$.

Если $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = n$, *то система линейных неоднородных уравнений имеет, и при том, единственное решение при любом столбце свободных членов, так что векторы* $\{\, \boldsymbol{f}_1, \,\dots\, , \,\boldsymbol{f}_k, \dots , \,\boldsymbol{f}_n \,\} \in \mathbb{R}_n$ *образуют базис.*

Применяя метод Гаусса, приведем матрицу $\boldsymbol{A}$ *в расширенной матрице* $\bar{\boldsymbol{A}} = \left[\, \boldsymbol{A} \,\middle|\, \boldsymbol{b} \,\right]$ *к “единичному” виду (в данном случае “единичный” вид - это просто единичная матрица) При этом правая часть* $\boldsymbol{b}$ *преобразуется в решение* $\boldsymbol{x}$ *системы уравнений*

$$\left[\, \boldsymbol{A} \,\middle|\, \boldsymbol{b} \,\right] \sim \left[\, \boldsymbol{I} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \,\right]$$

одновременно представляя собой координаты вектора $\boldsymbol{b}$ *в базисе* $\{\, \boldsymbol{f} \,\} = \{\, \boldsymbol{f}_1, \dots , \boldsymbol{f}_k, \dots , \boldsymbol{f}_n \,\}$

№ 4.4.

По определению пересечения

$$\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \operatorname{Lin}\{\, \boldsymbol{a}_1, \ \boldsymbol{a}_2, \dots \} \cap \operatorname{Lin}\{\, \boldsymbol{b}_1, \ \boldsymbol{b}_2, \dots \}$$

необходимо найти векторы, допускающие одновременно представление

$$\boldsymbol{c} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2 + \dots = y_1 \boldsymbol{b}_1 + y_2 \boldsymbol{b}_2 + \dots$$

Следовательно, задача сводится к решению однородной системы линейных уравнений

$$\left(x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2 + \dots\right) - \left(y_1 \boldsymbol{b}_1 + y_2 \boldsymbol{b}_2 + \dots\right) = \boldsymbol{0}$$

с матрицей коэффициентов $\boldsymbol{A} = \left[\, \boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \dots \ -\boldsymbol{b}_1 \ \ -\boldsymbol{b}_2 \dots \right]$. *Пересечение будут составлять множество векторов указанного выше вида, в котором роль коэффициентов* $(x_1, \ x_2, \dots)$, $(y_1, \ y_2, \dots)$ *играют решения полученной системы уравнений.*

$\Rightarrow$

5. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Определителем *квадратной матрицы* $A = \left[\, \boldsymbol{q}_1 \,\dots\, \boldsymbol{q}_j \,\dots\, \boldsymbol{q}_n \,\right]$ $n^{\underline{го}}$ *порядка называется значение функционала (числовой функции)* D_n *от* n *векторных аргументов-столбцов*

$$\det \boldsymbol{A} = D_n\left(\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_j, \dots, \boldsymbol{q}_n\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} \\ \cdot \\ a_{i1} \\ \cdot \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{q}_1, \quad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \cdot \\ a_{ij} \\ \cdot \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \boldsymbol{q}_j, \quad \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \cdot \\ a_{in} \\ \cdot \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \boldsymbol{q}_n$$

- n - ***линейного*** *(т.е. линейного по каждому аргументу)*

$$D_n(\dots, \alpha_j \boldsymbol{q}_j + \beta_j \boldsymbol{p}_j, \dots) = \alpha_j D_n(\dots, \boldsymbol{q}_j, \dots) + \beta_j D_n(\dots, \boldsymbol{p}_j, \dots)$$

- ***антисимметричного***

$$D_n(\dots, \boldsymbol{q}, \dots, \boldsymbol{p}, \dots) = -D_n(\dots, \boldsymbol{p}, \dots, \boldsymbol{q}, \dots)$$

- ***нормированного*** *условием*

$$D_n\left(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_j, \dots, \boldsymbol{e}_n\right) = 1$$

Минором M_{ij} *элемента* a_{ij} *называется определитель матрицы* $(n-1)^{\underline{го}}$ *порядка, получающейся из данной вычеркиванием* $i^{\underline{ой}}$ *строки и* $j^{\underline{го}}$ *столбца.*

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & * & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ * & \dots & \boxed{a_{ij}} & \dots & * \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & * & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} *элемента* a_{ij} *называется* $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots \\ \dots & \dots & & A_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & & \pm M_{ij} \end{bmatrix}$$

Имеют место формулы разложения определителя по элементам

$i^{\underline{ой}}$ *строки*

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \quad (i = 1, \dots, n)$$

$j^{\underline{го}}$ *столбца*

$$(j = 1, \dots, n) \quad \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = \det \boldsymbol{A}$$

Замечание*. Разложение целесообразно вести по строке (столбцу), в которых более всего* ***нулевых*** *элементов.*

Отсюда, в частности, получаем, что определитель “треугольной” (в частности, “диагональной”) матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

№ 5.2.

$\det \boldsymbol A$ *при выполнении над строками (столбцами) матрицы элементарных операций*

*1) “**перестановка**”* $i \rightleftarrows j \quad \Rightarrow \quad \det \to -\det$ - *меняет свой знак*

*2) “**умножение**”* $\alpha \times k \quad \Rightarrow \quad \det \to \alpha \det$ - *умножается на число*

*3) “**сложение**”* $i + j \quad \Rightarrow \quad \det \equiv \det$ - *не изменяется*

Отсюда, в частности, следует, что определитель не изменится, если к какой-нибудь строке (столбцу) прибавить линейную комбинацию остальных.

*Это позволяет применить метод Гаусса и привести матрицу к “треугольному” виду. Если в процессе преобразования появится **нулевая** строка (столбец), то определитель равен **нулю**. Если нет, то матрица преобразуется в “треугольную” и определитель будет равен произведению элементов на главной диагонали преобразованной матрицы.*

№ 5.3.

Система n *векторов* $\{\, \boldsymbol f_1, \ldots, \boldsymbol f_k, \ldots, \boldsymbol f_n \,\} \in \mathbb{R}_n$ *образует базис, если* $\det \boldsymbol A \neq 0$, *где* $\boldsymbol A = \left[\, \boldsymbol f_1 \ \ldots \ \boldsymbol f_k \ \ldots \ \boldsymbol f_n \,\right]$. *Нахождение координат вектора* $\boldsymbol b$ *в произвольном базисе* $\{\, \boldsymbol f \,\}$ *сводится к решению неоднородной системы линейных уравнений*

$$x_1 \boldsymbol f_1 + \ldots + x_k \boldsymbol f_k + \ldots + x_n \boldsymbol f_n = \boldsymbol b$$

имеющей, очевидно, единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера

$$\Delta_k = \det\left[\, \boldsymbol f_1 \ldots \underset{\substack{\downarrow \\ k}}{\boldsymbol b} \ldots \boldsymbol f_n \,\right] = \det\left[\, \boldsymbol f_1 \ldots \underbrace{x_1 \boldsymbol f_1 + \ldots + x_k \boldsymbol f_k + \ldots + x_n \boldsymbol f_n}_{\shortparallel \atop \boldsymbol b} \ldots \boldsymbol f_n \,\right] =$$

$$= x_k \cdot \det\left[\, \boldsymbol f_1 \ldots \boldsymbol f_k \ldots \boldsymbol f_n \,\right] = x_k \cdot \Delta \qquad \Rightarrow \qquad x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$$

№ 5.4.

Ранг матрицы $\boldsymbol A$ *равен максимальному порядку отличного от нуля минора (называемого базисным).*

Преобразуя матрицу методом Гаусса (неполному) к “треугольному” виду, найдем базисные строки и столбцы, на пересечении которых стоят элементы базисного минора